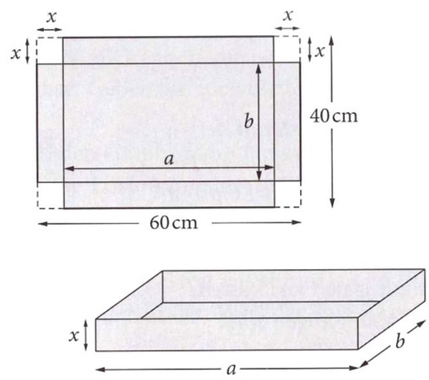
Jochen Weber

Ganzrationale Funktionen

Eine Metallwerkstatt möchte aus 60 cm langen und 40 cm breiten Metallblechen kleine Schachteln herstellen (siehe Skizze).



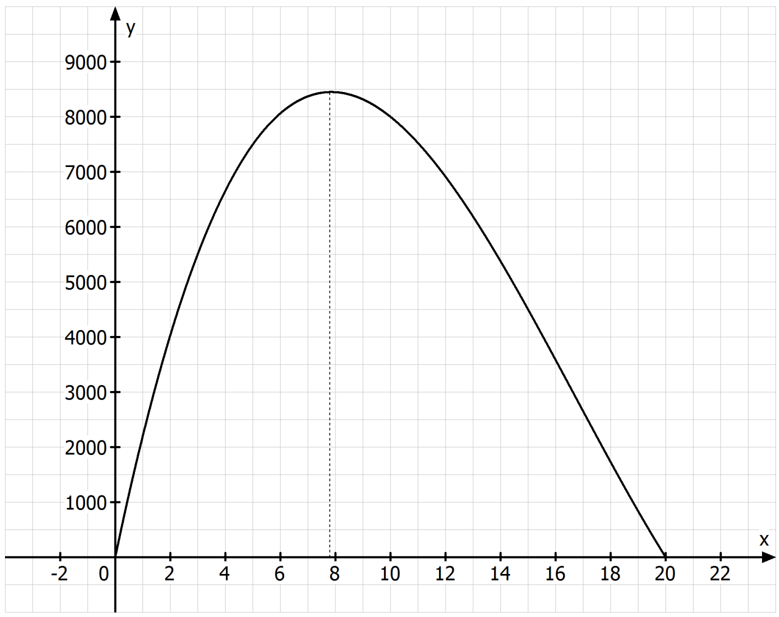
Die Schachteln sollen möglichst groß sein.
Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Höhe und dem Volumen her und ermitteln Sie, für welche Höhe das Volumen maximal wird.

$V_{Schachtel} = a \cdot b \cdot h$

$a = 60 - 2x \quad b = 40 - 2x \quad h = x$

Sinnvolle Defintionsmenge: $D_V =]0;20[$

$\Rightarrow V(x) = (60-2x)(40-2x)x = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$



Dem Graphen der Funktion entnehmen wir, dass bei einer Höhe von etwa 7,8 cm das Volumen der Schachtel maximal ist.

Definition:

Funktionen der Form $f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$,

$a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ heißen ganzrationale Funktionen n-ten Grades.

Beispiele:

1) $f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}$

2) $g(x) = -4x + 5$

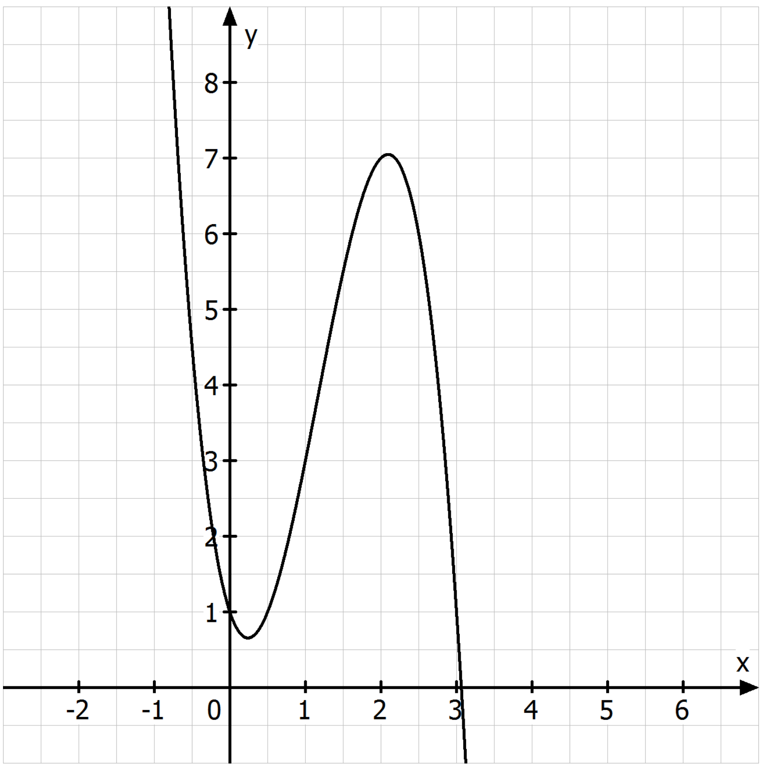
3) $h(x) = 4x^2 + 2x - 3$

4) $m(x) = -2x^3 + 7x^2 - 3x + 1$

Graph der Funktion $m(x) = -2x^3 + 7x^2 - 3x + 1$:

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4
m(x)	13	1	3	7	1	-27



Grundsätzlicher Verlauf ganzrationaler Funktionen:

1. Grades:

2. Grades:

3. Grades:

4. Grades:

Zusammenfassung:

1) n gerade und a_n positiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

2) n gerade und a_n negativ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

3) n ungerade und a_n positiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

4) n ungerade und a_n negativ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

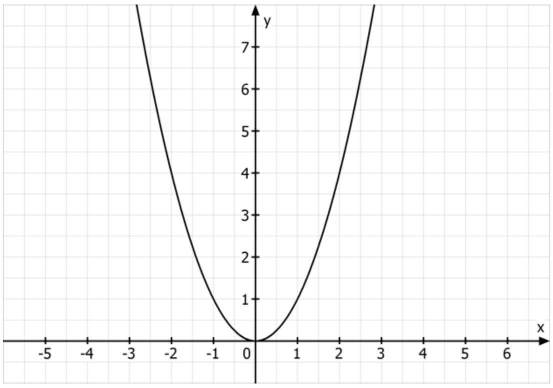
Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

(1) Definitionsbereich:

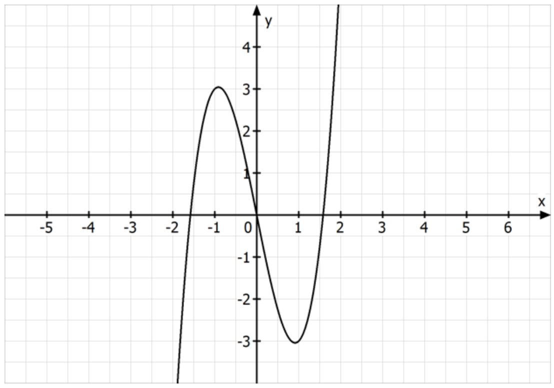
Alle ganzrationalen Funktionen haben als maximalen Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(2) Symmetrie:

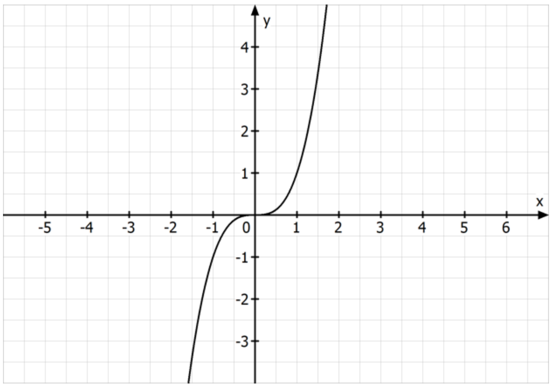
$y = x^2$



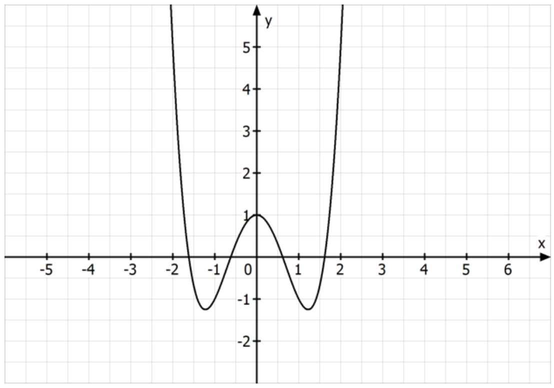
$y = 2x^3 - 5x$



$y = x^3$



$y = x^4 - 3x^2 + 1$



<u>Für die Symmetrie einer Funktion gilt:</u>

a) Ist f(-x) = f(x) für alle $x \in D$, so ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Ist f(-x) = -f(x) für alle $x \in D$, so ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Bemerkung:

Hat der Funktionsterm nur geradzahlige Exponenten, so ist f(-x) = f(x), d.h. der Graph G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Hat der Funktionsterm nur ungeradzahlige Exponenten, so ist f(-x) = -f(x), d.h. der Graph G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiele:

1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

2) $f(x) = 2x^3 - 5x$

$f(-x) = 2(-x)^3 - 5(-x) = -2x^3 + 5x = -(2x^3 - 5x) = -f(x)$

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

(3) Nullstellen:

Zur Bestimmung der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion muss folgende Gleichung gelöst werden: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$.

Es gilt:

Eine Gleichung n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Bei Funktionen 3. Grades und höheren Grades ist es nicht mehr möglich die Nullstellen mit einer praktikablen Formel zu bestimmen.

Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen ganzrationaler Funktionen höheren Grades

a) Nullstellenbestimmung durch Ausklammern

Beispiele:

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

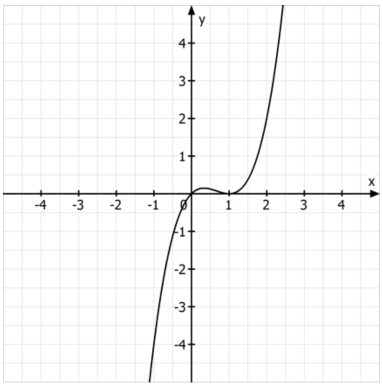
Ansatz: $x^3 - 2x^2 + x = 0$

$\Rightarrow x \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 1$

$\Rightarrow$ f hat zwei Nullstellen bei $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle)

und bei $x_2 = 1$ (doppelte Nullstelle)



2) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2$

Ansatz: $x^4 + 6x^3 + 8x^2 = 0$

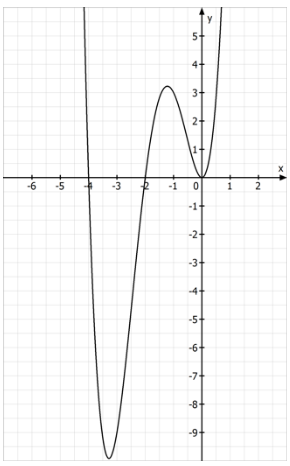
$\Rightarrow x^2 \cdot (x^2 + 6x + 8) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 8) = 0 \quad \Rightarrow (x+2)(x+4) = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -2 \quad x_3 = -4$

$\Rightarrow$ f hat drei Nullstellen bei $x_1 = 0$ (doppelt), bei $x_2 = -2$ (einfach)

und bei $x_3 = -4$ (einfach)

$\Rightarrow$ Zerlegung in Linearfaktoren (Faktorisierung): $f(x) = x^2 \cdot (x+2) \cdot (x+4)$



b) Nullstellenbestimmung durch Substitution:

Beispiel:

$f(x) = x^4 - x^2 - 12$

Ansatz: $x^4 - x^2 - 12 = 0$

Substitution: $z = x^2$

$\Rightarrow z^2 - z - 12 = 0 \quad \Rightarrow (z+3)(z-4) = 0 \quad \Rightarrow z_1 = -3 \quad z_2 = 4$

Resubstitution:

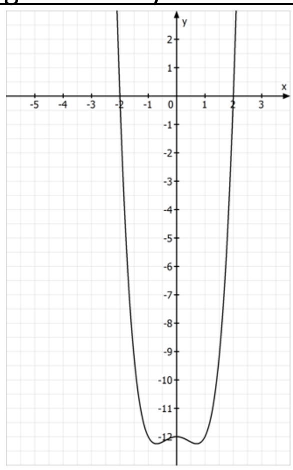
1) $x^2 = -3 \quad (f)$

2) $x^2 = 4 \quad \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

$\Rightarrow$ f hat zwei Nullstellen bei $x_1 = -2$ (einfach) und bei $x_2 = 2$ (einfach)

$\Rightarrow$ Zerlegung in Linearfaktoren: $f(x) = (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + 3)$

c) Nullstellenbestimmung durch Polynomdivision:



Beispiel:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Ansatz: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

Durch Ausprobieren der ganzen Zahlen im Bereich $\left[-3;3\right]$ findet man eine Nullstelle bei $x_1 = 1$.

Polynomdivision:

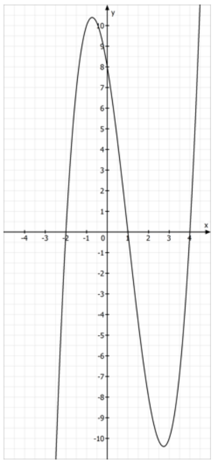
$$
\begin{array}{l}
(x^3-3x^2-6x+8):(x-1)=x^2-2x-8 \\
\underline{-(x^3-x^2)} \\
\quad -2x^2-6x+8 \\
\quad \underline{-(-2x^2+2x)} \\
\qquad -8x+8 \\
\qquad \underline{-(-8x+8)} \\
\qquad -----
\end{array}
$$

$\Rightarrow x^3-3x^2-6x+8=(x-1)\cdot(x^2-2x-8)$

$\Rightarrow$ Weitere Nullstellen: $x^2-2x-8=0 \quad \Rightarrow (x+2)(x-4)=0 \quad \Rightarrow x_2=-2 \quad x_3=4$

$\Rightarrow$ f hat drei Nullstellen bei $x_1=1$ (einfach), bei $x_2=-2$ (einfach) und bei $x_3=4$ (einfach)

$\Rightarrow$ Zerlegung in Linearfaktoren: $f(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-4)$



Aufgaben:

1 Bestimmen Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion $f(x)=x^3-x^2-8x+12$ und untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie.

2 Bestimmen Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion $f(x)=2x^3-4x^2+5x$ und untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie.

3 Bestimmen Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion $f(x)=3x^4-7x^2+1$ und untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie.

Lösungen:

1) Nullstellen:

$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ Ausprobieren: $x_1 = 2$

Polynomdivision:

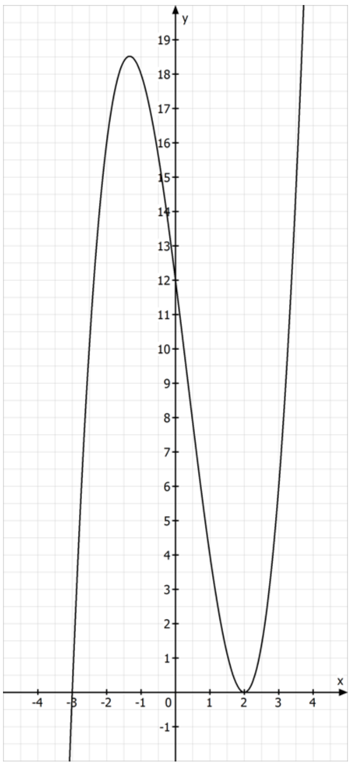
$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 - 8x + 12) : (x-2) = x^2 + x - 6 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad x^2 - 8x + 12 \\
\quad \underline{-(x^2 - 2x)} \\
\qquad -6x + 12 \\
\qquad \underline{-(-6x + 12)} \\
\qquad -----
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ weitere Nullstellen: $x^2 + x - 6 = 0$ $\Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$ $\Rightarrow x_2 = -3$ $x_3 = 2$

$\Rightarrow$ f hat zwei Nullstellen bei $x_1 = 2$ (doppelt) und bei $x_2 = -3$ (einfach)

Symmetrie:

G_f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung, weil im Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten auftreten.



2) Nullstellen:

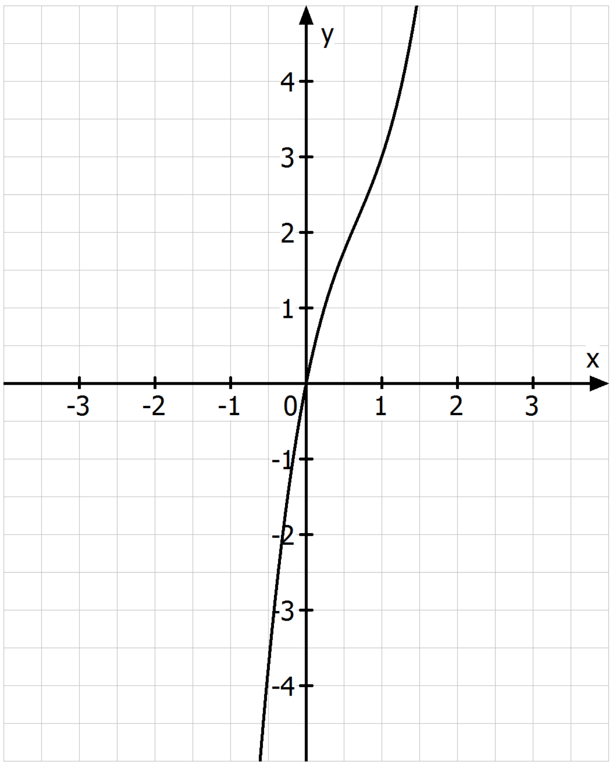
$2x^3-4x^2+5x=0 \quad \Rightarrow x\cdot(2x^2-4x+5)=0 \quad \Rightarrow x_1=0$

$2x^2-4x+5=0 \quad \Rightarrow x_{1/2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 2\cdot 5}}{4}=\dfrac{4\pm\sqrt{-24}}{4} \quad (f)$

$\Rightarrow$ f hat eine Nullstelle bei $x_1 = 0$ (einfach)

Symmetrie:

G_f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung, weil im Funktionsterm gerade und ungerade Exponenten auftreten.



3) Nullstellen:

$3x^4 - 7x^2 + 1 = 0$

Substitution: $z = x^2$

$\Rightarrow 3z^2 - 7z + 1 = 0 \quad \Rightarrow z_{1/2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$

$\Rightarrow z_1 = \dfrac{7 + \sqrt{37}}{6} \ (\approx 2{,}18) \quad z_2 = \dfrac{7 - \sqrt{37}}{6} \ (\approx 0{,}15)$

Resubstitution:

1) $x^2 = 2{,}18 \quad \Rightarrow x_1 \approx 1{,}48 \quad x_2 \approx -1{,}48$

2) $x^2 = 0{,}15 \quad \Rightarrow x_3 \approx 0{,}39 \quad x_4 \approx -0{,}39$

$\Rightarrow$ f hat vier Nullstellen bei x_1 = 1,48 (einfach), bei x_2 = -1,48 (einfach) bei x_3 = 0,39 (einfach) und bei x_4 = -0,39 (einfach)

Symmetrie:

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil im Funktionsterm nur gerade Exponenten auftreten.